CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

# MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

*Les calculatrices ne sont pas autorisées*

### Notations

Soit $n$ et $p$ des entiers supérieurs ou égaux à 1. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant $n$ lignes et $p$ colonnes. On identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ respectivement à $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, que l'on supposera munis de leurs produits scalaires canoniques notés respectivement $< \cdot | \cdot >_n$ et $< \cdot | \cdot >_p$. Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respectivement $|| \cdot ||_n$ et $|| \cdot ||_p$.

On notera $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $(F_j)_{1 \leq j \leq n}$ celle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est muni de sa structure d'algèbre, $I_n$ représentant la matrice identité.

$0_{n,p}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $0_n$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour $A$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de $A$ : c'est un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

Ker $A$ est le noyau de $A$ défini par

$$\text{Ker } A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$$

Im $A$ est l'image de $A$ définie par

$$\text{Im } A = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$$

Enfin, on adopte la notation $F^\perp$ pour désigner l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel $F$ d'un espace euclidien.

### Partie I

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

**I.1** Montrer que ${}^tAA$ est nulle si et seulement si $A$ est nulle.

Dans toute la suite du problème $A$ sera supposée non nulle.

**I.2** Montrer que les matrices ${}^tAA$ et $A{}^tA$ sont diagonalisables au moyen de matrices orthogonales.

**I.3 a)** $X, Y$ désignant deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, exprimer le produit scalaire $< X \mid Y >_n$ sous la forme d'un produit matriciel.

**Tournez la page S.V.P.**

**b)** Si $W$ est un vecteur propre de ${}^tAA$ associé à la valeur propre $\lambda$, exprimer $||AW||_n^2$ en fonction de $\lambda$ et $||W||_p$.

**c)** En déduire que les valeurs propres de ${}^tAA$ sont réelles, positives ou nulles.

**I.4 a)** Pour $x$ réel, calculer les produits matriciels par blocs suivants :

$$\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0_{p,n} & -xI_p \end{pmatrix}$$

**b)** En déduire que les matrices ${}^tAA$ et $A{}^tA$ ont les mêmes valeurs propres non nulles avec le même ordre de multiplicité.

**c)** En déduire également que les matrices ${}^tAA$ et $A{}^tA$ ont même rang.

**I.5** Montrer que si $n > p$, 0 est valeur propre de $A{}^tA$ et que si $n < p$, 0 est valeur propre de ${}^tAA$.

**I.6** On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de ${}^tAA$, chaque valeur propre apparaissant dans cette liste un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et on pose $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout $i$ élément de $\{1, 2, \ldots, p\}$.

*Les réels $\mu_i$ sont appelés valeurs singulières de $A$.*

On suppose les réels $\lambda_i$ ordonnés tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_p \geq 0$.

**a)** Montrer que $\lambda_1$ est non nul.

On définit alors un unique entier naturel $r$ appartenant à $\{1, 2, \ldots, p\}$ comme suit : si toutes les valeurs propres de ${}^tAA$ sont non nulles, $r = p$, sinon $r$ est tel que pour tout $i \leq r$, $\lambda_i > 0$ et pour tout $i > r$, $\lambda_i = 0$ .

Soit $(V_1, V_2, \ldots, V_p)$ une base orthonormale de vecteurs propres de ${}^tAA$ respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ ; $V_1, V_2, \ldots, V_r$ désignent les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles et lorsque $r$ est strictement inférieur à $p$, $V_{r+1}, \ldots, V_p$ désignent les vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

**b)** Montrer que $r \leq n$ et que la dimension de $\mathrm{Ker}\, A{}^tA$ est égale à $n - r$.

Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, on pose $U_i = \dfrac{1}{\mu_i} AV_i$ et si $n > r$, on désigne par $(U_{r+1}, \ldots, U_n)$ une base orthonormale de $\mathrm{Ker}\, A{}^tA$.

**c)** Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $AV_i = \mu_i U_i$ et que si $r$ est strictement inférieur à $p$, pour tout $i \in \{r+1, \ldots, p\}$, $AV_i = 0$.

**d)** Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, ${}^tAU_i = \mu_i V_i$.

**e)** Montrer que si $n > r$, pour tout $i \in \{r+1, \ldots, n\}$, ${}^tAU_i = 0$.

**f)** En déduire que le système de vecteurs $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ constitue une base orthonormale de vecteurs propres de $A{}^tA$ et préciser la valeur propre associée à chaque vecteur $U_i$.

**I.7** On note $V$ la matrice carrée réelle d'ordre $p$ dont le i$^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur $V_i$, $U$ la matrice carrée réelle d'ordre $n$ dont le j$^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur $U_j$ et $({}^tUAV)_{ij}$ l'élément de la i$^{\text{ème}}$ ligne, j$^{\text{ème}}$ colonne de la matrice ${}^tUAV$.

**a)** Montrer que :

$$\forall (i,j) \in \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, p\}\ ,\ ({}^tUAV)_{ij} = \mu_j \delta_{ij} \text{ où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

**b)** On note $\Delta$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments $\Delta_{ij}$ sont nuls sauf $\Delta_{11}, \Delta_{22}, \ldots, \Delta_{rr}$ respectivement égaux à $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$. Montrer que $A = U\Delta {}^tV$.

*La factorisation de $A$ ainsi obtenue est dite décomposition de $A$ en valeurs singulières.*

**c)** Trouver une décomposition en valeurs singulières de chacune des matrices :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**I.8** Montrer que le rang de $A$ est égal à $r$.

**I.9** **a)** Montrer que $V = \sum_{i=1}^{p} V_i {}^tE_i$.

**b)** En déduire :

$$A = \sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i {}^tV_i \ , \ {}^tAA = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i V_i {}^tV_i \ , \ A{}^tA = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i {}^tU_i$$

**c)** Déterminer les sous-espaces vectoriels suivants : $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker} {}^tA$, $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im} {}^tA$.

**d)** Montrer que $\operatorname{Ker} {}^tAA = \operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Ker} A{}^tA = \operatorname{Ker} {}^tA$

## Partie II

Avec les notations de la partie **I**, pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ admettant une décomposition en valeurs singulières $A = U\Delta {}^tV$, on appelle $\Delta^+$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments $\Delta^+_{ij}$ sont nuls sauf $\Delta^+_{11}, \Delta^+_{22}, \ldots, \Delta^+_{rr}$ respectivement égaux à $\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}, \ldots, \frac{1}{\mu_r}$ et on pose $A^+ = V(\Delta^+){}^tU$

*$\Delta^+$ (resp. $A^+$) est appelée pseudo-inverse de $\Delta$ (resp. de $A$). A priori, la matrice $A^+$ ainsi définie dépend de la décomposition en valeurs singulières choisie pour la matrice $A$, mais il sera montré à la question* **II.9** *qu'il n'en est rien et que $A^+$ est uniquement déterminée à partir de $A$.*

**II.1** Déterminer les matrices $A_0^+$, $A_0A_0^+$, $A_0^+A_0$, $A_0A_0^+A_0$ et $A_0^+A_0A_0^+$.

**II.2** Déterminer $(A_0^+)^+$.

**II.3** Evaluer $\Delta^+\Delta$ et $\Delta\Delta^+$.

**II.4** Montrer que si $A$ est une matrice carrée inversible ($n = p = r$), alors $A^+ = A^{-1}$.

**II.5** Montrer que :

$$A^+ = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\mu_i} V_i {}^tU_i \ , \ AA^+ = \sum_{i=1}^{r} U_i {}^tU_i \ , \ A^+A = \sum_{i=1}^{r} V_i {}^tV_i$$

**II.6** **a)** Evaluer $AA^+U_j$ pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et en déduire que $AA^+$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $\operatorname{Im} A$.

**b)** Montrer de même que $A^+A$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^p$ sur $(\operatorname{Ker} A)^\perp$.

**Tournez la page S.V.P.**

**II.7** Etablir les identités suivantes :

$$AA^+ = {}^t(AA^+)\ ,\ A^+A = {}^t(A^+A)\ ,\ AA^+A = A\ ,\ A^+AA^+ = A^+ \qquad (1)$$

**II.8** Etablir les résultats suivants :

i) $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, AA^+$ , $\mathrm{Ker}\, A^+ = \mathrm{Ker}\, AA^+$ , $\mathrm{Im}\, A^+ = \mathrm{Im}\, A^+A$ , $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, A^+A$.

ii) $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\, A \oplus \mathrm{Ker}\, A^+$ , $\mathbb{R}^p = \mathrm{Im}\, A^+ \oplus \mathrm{Ker}\, A$.

**II.9** Soit $B$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$AB = {}^t(AB)\ ,\ BA = {}^t(BA)\ ,\ ABA = A\ ,\ BAB = B$$

**a)** Montrer que $B$ vérifie les identités suivantes :

i) $B = B{}^tB{}^tA = {}^tA{}^tBB$

ii) $A = A{}^tA{}^tB = {}^tB{}^tAA$

iii) ${}^tA = {}^tAAB = BA{}^tA$

**b)** En déduire que $B = A^+$, autrement dit que $A^+$ est l'unique matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ vérifiant les relations (1).

**II.10** Montrer que $(A^+)^+ = A$ et ${}^t(A^+) = ({}^tA)^+$.

**II.11** Evaluer $(A_0B_0)^+$ et $B_0^+A_0^+$. A-t-on l'égalité ?

**II.12** Soit $H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\overline{H} = A^+H$. On note $\mathrm{d}(H, \mathrm{Im}\, A)$ la distance de $H$ au sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}\, A$.

**a)** Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $AX - AA^+H$ et $H - AA^+H$ sont orthogonaux et en déduire :

$$\forall\, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\ ,\ ||A\overline{H} - H||_n \leq ||AX - H||_n$$

Que vaut alors $\mathrm{d}(H, \mathrm{Im}\, A)$ ?

**b)** Montrer que s'il existe $\widetilde{H} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $||A\widetilde{H} - H||_n = ||A\overline{H} - H||_n$ avec $\widetilde{H} \neq \overline{H}$, alors $||\overline{H}||_p < ||\widetilde{H}||_p$.

**c)** Si $H = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, déterminer $\inf_{X \in \mathbb{R}^2} ||A_0X - H||_3$.

**Fin de l'énoncé**